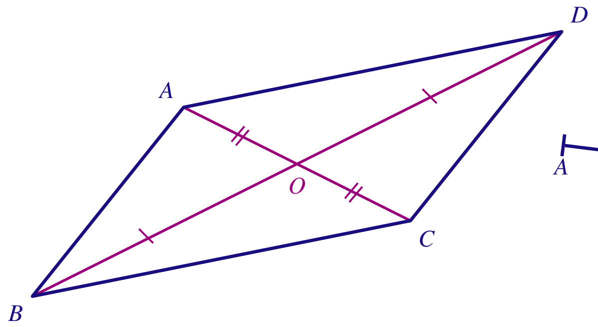
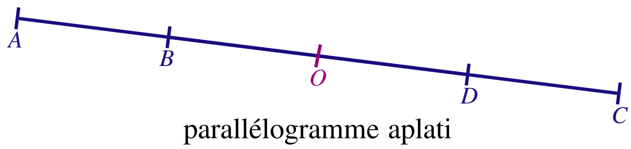
I NOTION DE VECTEUR

1 – PARALLÉLOGRAMME

DÉFINITION

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ses diagonales ont le même milieu





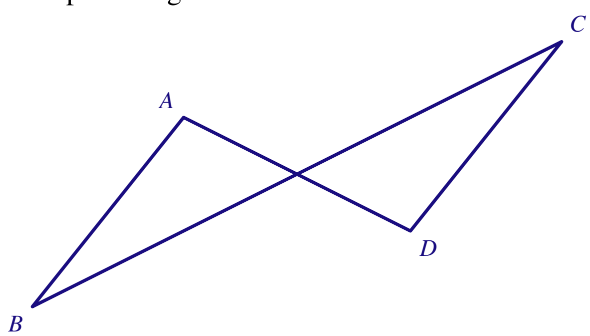
parallélogramme aplati

PROPRIÉTÉS

- Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$.
- Dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur.

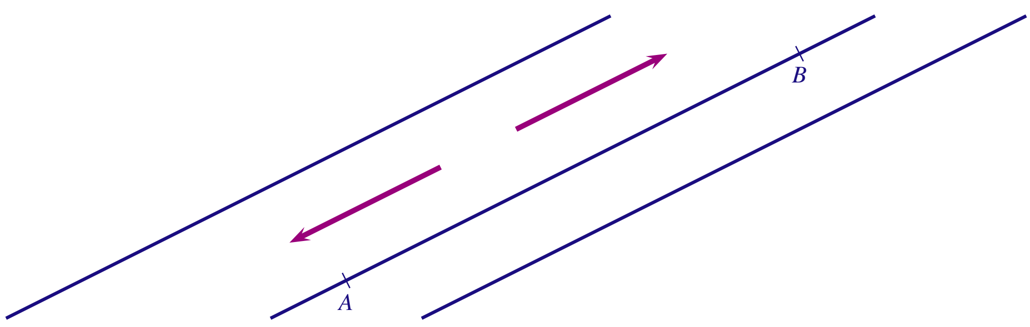
REMARQUE

Dire que dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ne suffit pas pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.



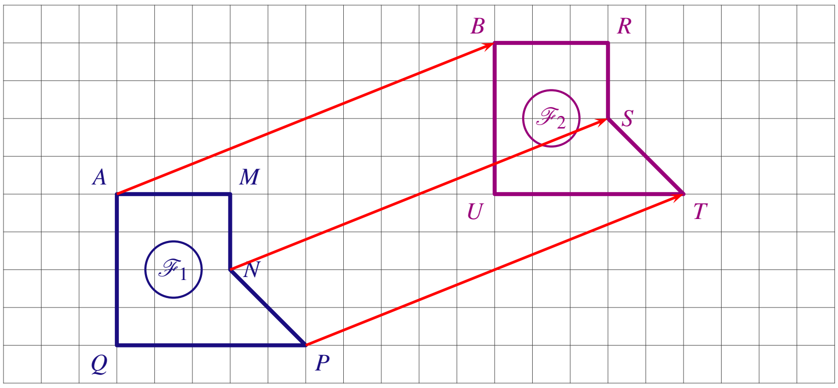
Dans le quadrilatère $ABCD$ nous avons $(AB)//(CD)$ et $AB = CD$, pourtant $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

2 – SENS ET DIRECTION



- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même direction.
- Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB), il y a deux sens de parcours dans cette direction : soit de A vers B, soit de B vers A.

3 – TRANSLATION



Le glissement qui permet d'obtenir la figure $\mathscr{F}_2$ à partir de la figure $\mathscr{F}_1$ peut être décrit de façon précise par trois caractères :

— la *direction* du glissement est donnée par la droite (AB) ;

— le *sens* du glissement est celui de A vers B ;

— la *distance* du glissement est égale à la longueur du segment $[AB]$.

On dit que la figure $\mathscr{F}_2$ est l'image de la figure $\mathscr{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

REMARQUE

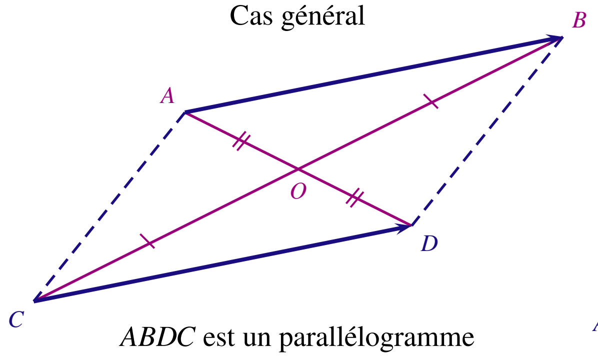
Les vecteur $\overrightarrow{NS}$ et $\overrightarrow{PT}$ sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on dit qu'ils sont égaux. On note alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{PT}$$

DÉFINITION

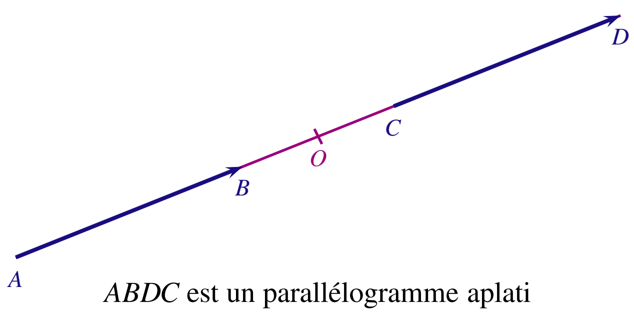
Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.
Cette translation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas général



$ABDC$ est un parallélogramme

Cas particuler où A, B et C sont alignés



$ABDC$ est un parallélogramme aplati

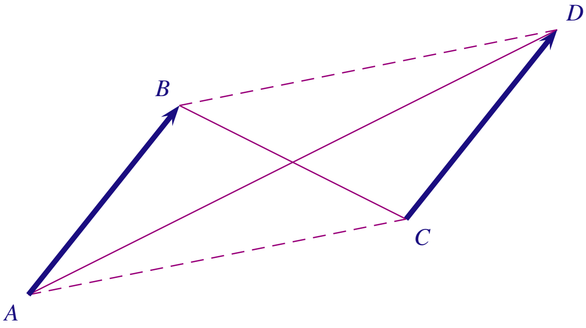
II VECTEURS

Un couple (A,B) du plan détermine un vecteur. A est l'origine du vecteur et B est son extrémité. On le note $\overrightarrow{AB}$

1 – ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation

DÉFINITION



A, B, C et D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :

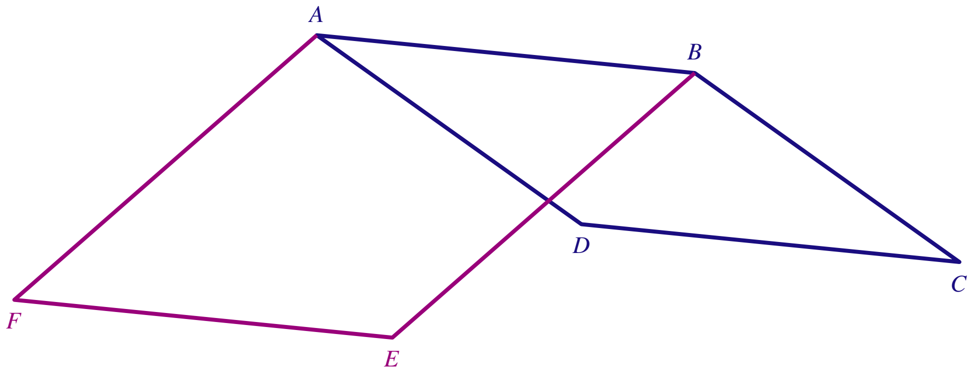
— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

EXEMPLE : LES TROIS PARALLÉLOGRAMMES

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.



— $ABCD$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

— $ABEF$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

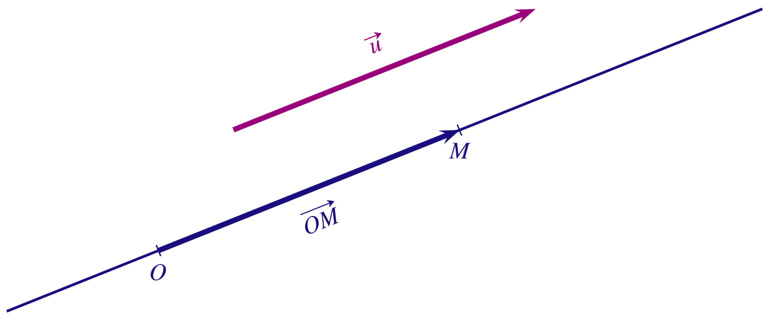
2 – REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \cdots$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FE}$, ... sont des représentants du vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \cdots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :

— Sa direction : c'est celle de la droite (OM).

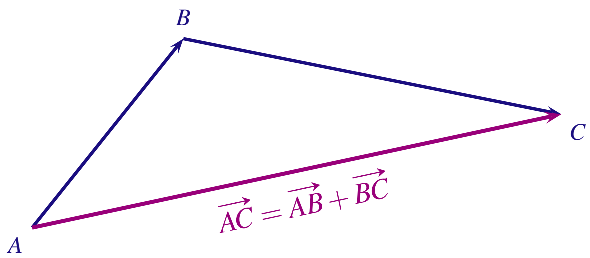
— Son sens : c'est le sens de O vers M.

— Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM.

III ADDITION VECTORIELLE

1 – SOMME DE DEUX VECTEURS

Soit trois points A, B et C.
Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$



RELATION DE CHASLES

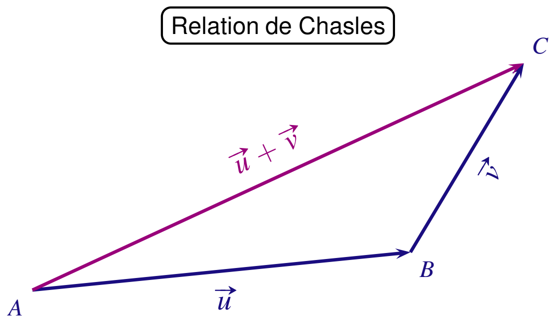
Quels que soient les points A, B et C on a :

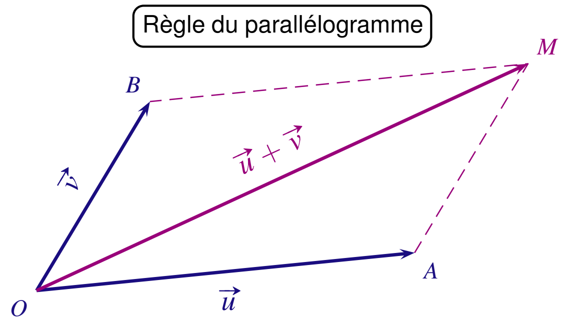
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

La somme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS





PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

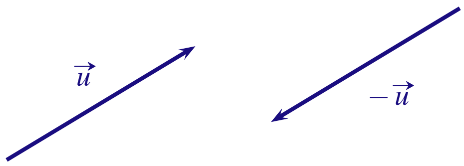
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; $\quad\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$; $\quad(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w})$

2 – DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.



CONSÉQUENCE

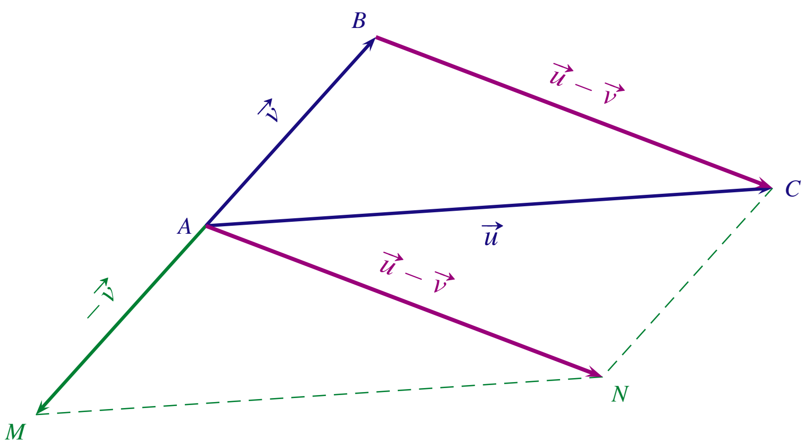
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

✻ PREUVE

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

DÉFINITION

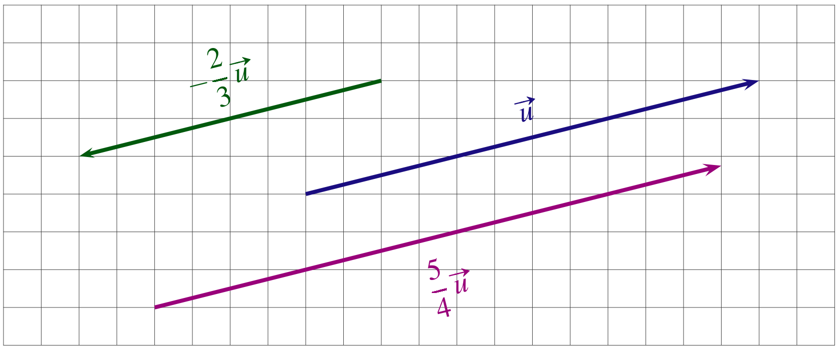
Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$.



Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

IV MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1 – PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL k

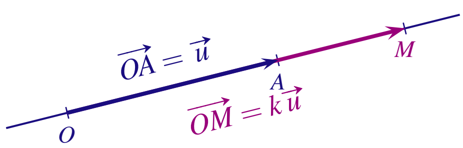


DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :

— sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$;

Cas où $k > 0$

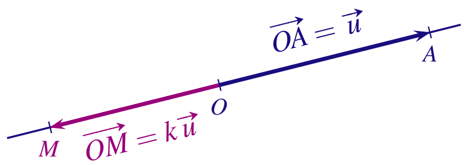


— son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$;

— sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où $k < 0$



— son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$;

— sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ et se lit :
« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par la valeur absolue du réel k »

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\vec{u} = \vec{0}$: ainsi, l'égalité $k\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

REMARQUE

Soit A et B deux points distincts, et k un réel donné. Il existe un unique point M défini par la relation $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$:

— M est un point de la droite (AB)

— M a pour abscisse k dans le repère $(A; B)$ d'origine A

2 – PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' :
$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$; $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$; $k\vec{u} = \vec{0} \iff k=0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3 – VECTEURS COLINÉAIRES

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

REMARQUES

— Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

— Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 – APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

MILIEU D'UN SEGMENT

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou 2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

4) Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

✳ DÉMONSTRATION

1. L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).
2. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}$
3. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB} \iff 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$
4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}$$

Réciproquement, la propriété $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ étant vraie pour tout point M on peut l'appliquer au point I. Soit :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \vec{0}$$

Ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$

THÉORÈME

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

✳ DÉMONSTRATION

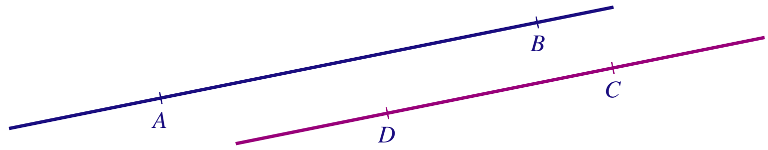
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$$

PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
— Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

✻ DÉMONSTRATION

— Si $(AB)//(CD)$ alors, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction donc ils sont colinéaires.



Réciproquement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors, ils ont la même direction donc $(AB)//(CD)$

— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires signifie donc $(AB)//(AC)$. Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

EXEMPLES

EXEMPLE 1 : CONSTRUCTION DE POINTS

La méthode pour construire un point M défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

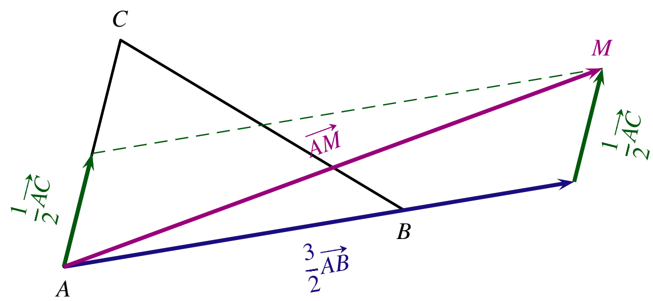
$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Soit trois points non alignés A, B et C. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

— Choisissons par exemple A comme « *origine connue* »

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \\
&\iff -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

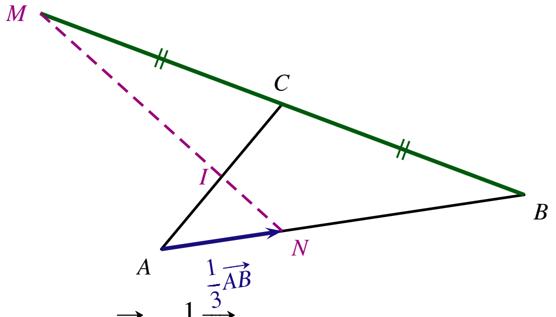
— Nous pouvons construire le point M :



EXEMPLE 2 : PARALLÉLISME, ALIGNEMENT

Montrer que des points sont aligné, ou sont sur des droites parallèles, revient à montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AC]$, M est le symétrique de B par rapport à C et le point N est tel que $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Les points M, I et N sont-ils alignés ?



— I est le milieu du segment $[AC]$ donc $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

— M est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu du segment $[BM]$ d'où $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$.

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Ainsi, $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{MI}=3\overrightarrow{IN}$.

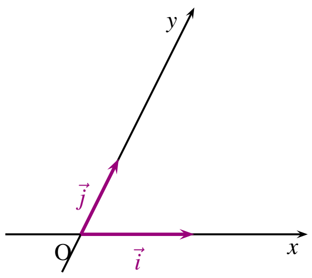
Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires donc les points M, I et N sont alignés.

V COORDONNÉES

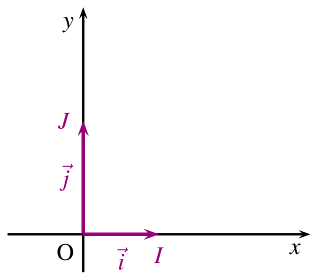
1 – REPÈRE DU PLAN

On appelle base tout couple $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de vecteurs non colinéaires.

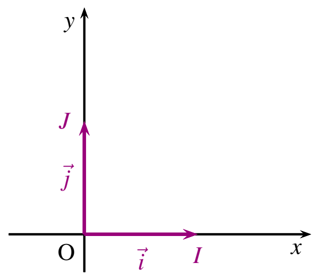
Un repère du plan est un triplet $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base.



Repère quelconque



Repère orthogonal
$(OI)\perp(OJ)$



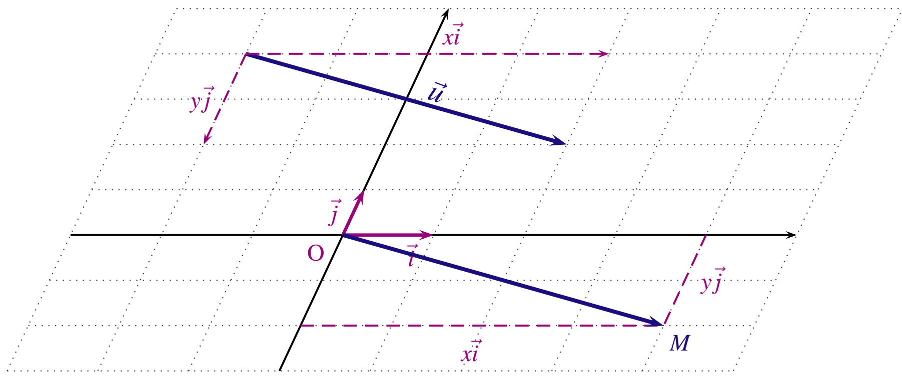
Repère orthonormé
$(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

2 – COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.

On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M\,(x;y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M}=\vec{u}$.

On note indifféremment $\vec{u}\,(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



— $(x;y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ signifie que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

— $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

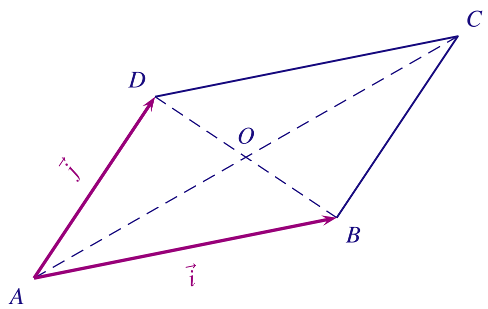
REMARQUE

Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

EXEMPLE

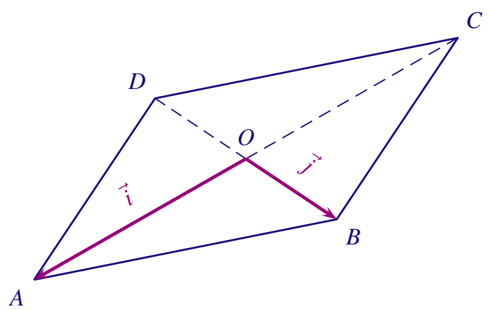
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

— Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:



$A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

— Dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$:



$A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs :

— $\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $x=0$ et $y=0$.

— $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.

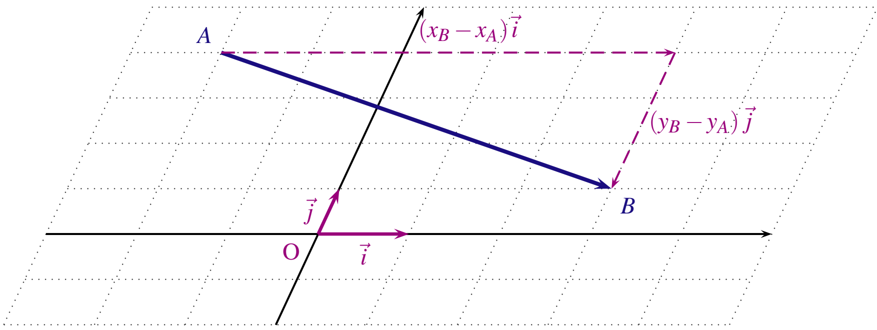
— Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

— pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

3 – COORDONNÉES DU VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.



✳ DÉMONSTRATION

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

4 – COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.
Les coordonnées du milieu $I\left(x_I;y_I\right)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}\quad\text{et}\quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

✳ DÉMONSTRATION

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\overrightarrow{\mathrm{O}I}=\overrightarrow{\mathrm{O}A}+\overrightarrow{\mathrm{O}B}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{O}I}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A}+\overrightarrow{\mathrm{O}B}\right)$

5 – CONDITION DE COLINÉARITÉ

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

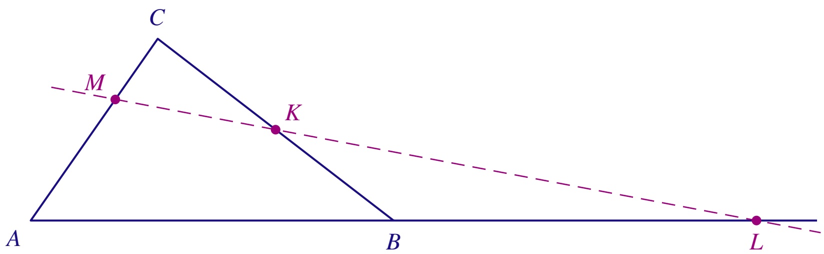
$$xy' - x'y = 0$$

✻ DÉMONSTRATION

- Dans le cas où l'un des deux vecteurs est nul, les vecteurs sont colinéaires et la relation $xy' - x'y = 0$ est vérifiée car $x = y = 0$ ou $x' = y' = 0$.
- Dans le cas où les deux vecteurs sont non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{v}$. Soit $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ ce qui équivaut à $xy' - x'y = 0$.

EXEMPLE

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$, L est le symétrique du point A par rapport à B.
Déterminer la position du point M sur la droite (AC) pour que les points K, L et M soient alignés.



Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

- Les coordonnées du point K milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.
- L est le symétrique du point A par rapport à B donc $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du point L sont $L(2;0)$.
- M est un point de la droite (AC) donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$ d'où M a pour coordonnées $M(0;y)$.

Les points K, L et M sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$:

$$\begin{array}{lllll} & \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}x_K - x_L\\ y_K - y_L\end{pmatrix} & \text{soit} & \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}-2\\ \dfrac{1}{2}-0\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix} \\ \text{et} & \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}x_M - x_L\\ y_M - y_L\end{pmatrix} & \text{soit} & \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}0-2\\ y-0\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}-2\\ y\end{pmatrix}\end{array}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires pour y solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2}\times y - (-2)\times\frac{1}{2} = 0 \iff -\frac{3}{2}\times y = -1 \iff y = \frac{2}{3}$$

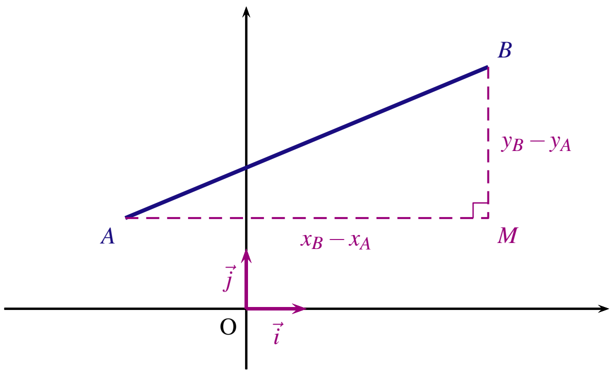
Ainsi, M est le point de la droite (AC) tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

6 – DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B;y_B)$ deux points du plan muni d'un repère *orthonormal* $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$, la distance AB est donné par

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

✻ DÉMONSTRATION



Comme $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormal, le triangle AMB est un triangle rectangle en M.
D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2=AM^2+MB^2$$
$$\text{Soit } AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$
$$\text{d'où } AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

EXEMPLE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $A(-1;-2)$, $B(2;2)$ et $C(-2;5)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

— $AB=\sqrt{(2-(-1))^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

— $AC=\sqrt{(-2-(-1))^2+(5-(-2))^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

— $BC=\sqrt{(-2-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Nous avons $AC^2=AB^2+BC^2$ alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
En outre $AB=BC$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B.